OPCIÓN A

1.- Se sabe que la gráfica de $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$ tiene una recta tangente horizontal en el punto $P(2\ ,\ 4)$. Hallar los valores de a y b. (2,5 puntos)

$$f'(x)=\frac{2axx-(ax^2+b)}{x^2}=\frac{2ax^2-ax^2-b}{x^2}=\frac{ax^2-b}{x^2}\Rightarrow f'(2)=0\Rightarrow\frac{a\cdot 2^2-b}{2^2}=0\Rightarrow 4a-b=0$$

$$f(2)=4\Rightarrow\frac{a\cdot 2^2+b}{2}=4\Rightarrow 4a+b=8$$

$$\begin{cases}4a-b=0\\4a+b=8\end{cases}\Rightarrow 8a=8\Rightarrow a=1\Rightarrow b=4\cdot 1=4\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+4}{x}$$

2.- La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total dado por la función $C(x)$=1.500x + 1.000.000. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x)$ = 4.000 − x. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo? (2,5 puntos)

Siendo x el número de tabletas vendidas

$$Ganacias\Rightarrow G(x)=x\cdot P(x)-C(x)=x\,(4000-x)-(1500x+1000000)=4000x-x^2-1500x-1000000$$

$$G(x)=-x^2+2500x-1000000\Rightarrow G'(x)=\frac{dG(x)}{dx}=-2x+2500\Rightarrow Si\ G'(x)=0\Rightarrow -2\cdot(x-1250)=0\Rightarrow$$

$$x-1250=0\Rightarrow x=1250$$

$$G''(x)=\frac{d^2G(x)}{dx^2}=-2<0\Rightarrow Máximo\Rightarrow x=1250\ tablets$$

3.- Estudiar el sistema siguiente para los distintos valores del parámetro m y resolverlo en los casos en que sea posible $\begin{cases}x+y=1\\my+z=0\\x+(m+1)y+mz=m+1\end{cases}$ **(2,5 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&m&1\\1&m+1&m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&m&1\\0&m&m\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}m&1\\m&m\end{vmatrix}=m^2-m=(m-1)\,m\Rightarrow Como\ |A|=0\Rightarrow(m-1)\,m=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}m=0\\m=1\end{cases}\Rightarrow\forall x\in\Re-\{0\ ,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Numero\ incognitas\Rightarrow Sist\ Compatible\ Deter\min ado$$

Continuación Problema 3 de la Opción A

$Si \quad m=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Numero\,incognitas\Rightarrow$$

$$Compatible\,Indeterminado\Rightarrow z=0\Rightarrow x+y=1\Rightarrow x=1-y\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(1-\lambda\,,\,\lambda\,,\,0)$$

$Si \ m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Soluciones\,cuando\,el\ Sistema\,es\ Compatible\,Determinado\Rightarrow\forall m\in\Re-\{0\,,1\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&m&1&0\\1&m+1&m&m+1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&m&1&0\\0&m&m&m\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&m&1&0\\0&0&m-1&m\end{array}\right)\Rightarrow(m-1)z=m\Rightarrow z=\frac{m}{m-1}\Rightarrow my+\frac{m}{m-1}=0\Rightarrow$$

$$my=-\frac{m}{m-1}\Rightarrow y=-\frac{m}{m\,(m-1)}=-\frac{1}{m-1}\Rightarrow x-\frac{1}{m-1}=1\Rightarrow x=\frac{1}{m-1}+1=\frac{1+m-1}{m-1}=\frac{m}{m-1}$$

4.- Dados los puntos $A(-1\,,0\,,3)$, $B(2\,,4\,,1)$ y $C(-4\,,3\,,1)$:

a) Estudiar si los puntos $A,B\ y\ C$ están alineados. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación de la recta paralela al segmento AB y que pasa por C. Expresarla como intersección de dos planos. (1,25 puntos)

a) Si los puntos están alineados los vectores **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2\,,4\,,1)-(-1\,,0\,,3)=(3\,,4\,,-2)\\\overrightarrow{AC}=(-4\,,3\,,1)-(-1\,,0\,,3)=(-3\,,3\,,-2)\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{-3}\neq\frac{4}{3}\Rightarrow No\ están\ alineados$$

b) La recta buscada **r** tiene como vector director al vector **AB** y pasa por **C**, de aquí:

$$r\equiv\frac{x+4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{-2}\Rightarrow\begin{cases}4x+16=3y-9\\-2y+6=4z-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-3y+25=0\\2y+4z-10=0\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}4x-3y+25=0\\y+2z-5=0\end{cases}$$

OPCIÓN B

1.- a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (0,75 puntos)

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ (0,75 puntos)

d) Calcular el valor de m de tal forma que $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4}=6$ (1 punto)

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{2x}=\frac{sen\ 0}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{1-\sqrt{1-0^2}}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-x^2\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{0}{1+\sqrt{1-0^2}}=\frac{0}{2}=0$$

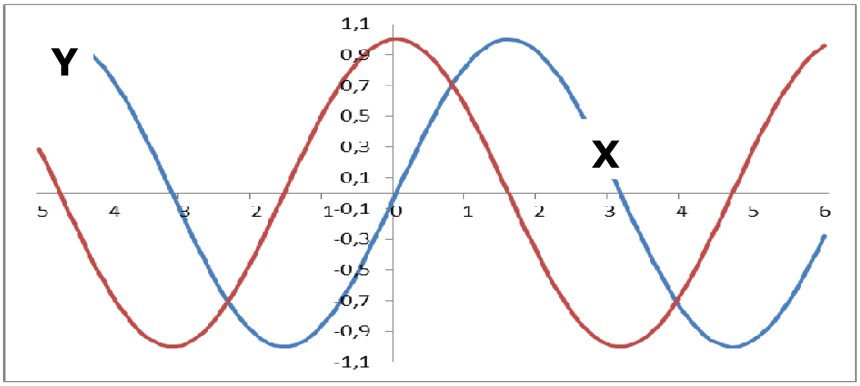
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+3-2mx^2-3mx}{x^2+4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2mx^2+(2-3m)x+3}{x^2+4}=\frac{\infty}{\infty}=$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2m\frac{x^2}{x^2}+(2-3m)\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2m+\frac{(2-3m)}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{-2m+\frac{(2-3m)}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{1+\frac{4}{\infty}}=$$
$$=\frac{-2m+0+0}{1+0}=-2m\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4}=6\Rightarrow -2m=6\Rightarrow m=-3$$

2.- Dadas las funciones $f(x)=sen(x)$ y $g(x)=\cos(x)$, se pide:

a) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x=\frac{\pi}{4}$ y $x=\pi$. (1,25 puntos)

b) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x=\frac{\pi}{4}$ y $x=2\pi$. (1,25 puntos)

Continuación del problema 2 de la opción B



a)

$$sen\ x = \cos x \Rightarrow tg\ x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen\ x\ dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\ x\ dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ dx \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} sen\ x\ dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x\ dx = -[\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [sen\ x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$A_1 = -\left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{4}\right) - \left(sen\ \pi - sen\ \frac{\pi}{4}\right) = -\left[(-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right) u^2$$

b)

$$A_2 = A_1 + \left| \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x\ dx \right| - \left| \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} sen\ x\ dx \right| + \left| \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} sen\ x\ dx \right| - \left| \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\ dx \right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\ dx + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} sen\ x\ dx \right|$$

$$A_2 = A_1 - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x\ dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} sen\ x\ dx - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} sen\ x\ dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\ dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\ dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} sen\ x\ dx =$$

$$= A_1 - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x\ dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} sen\ x\ dx - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} sen\ x\ dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \cos x\ dx = A_1 - [sen\ x]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} - [\cos x]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} + [\cos x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} + [sen\ x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}$$

$$A_2 = A_1 - \left(sen\ \frac{5\pi}{4} - sen \pi\right) - \left(\cos \frac{5\pi}{4} - \cos \pi\right) + \left(\cos 2\pi - \cos \frac{5\pi}{4}\right) + \left(sen\ 2\pi - sen\ \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$A_2 = A_1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)\right] + \left[0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$A_2 = A_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = A_1 + \sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}}{2} = A_1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$A_2 = \left(1 + 3\sqrt{2}\right) u^2$$

3.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar las matrices X e Y de dimensiones 2 x 3 tales que verifican el sistema matricial $\begin{cases} 3X+Y=A \\ 4X+2Y=B \end{cases}$ **(2,5 puntos)**

$$\begin{cases} 6X+2Y=2A \\ -4X-2Y=-B \end{cases} \Rightarrow 2X=2A-B \Rightarrow X=\frac{1}{2}(2A-B)=\frac{1}{2}\left[2\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 12X+4Y=4A \\ -12X-6Y=-3B \end{cases} \Rightarrow -2Y=4A-3B \Rightarrow Y=-\frac{1}{2}(4A-3B)=-\frac{1}{2}\cdot\left[4\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}\right]$$

$$Y=-\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & 20 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 6 & 3 & 24 \end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -8 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Determinar el valor de α para que la recta **r** de ecuación: $r:\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\beta \equiv x-\alpha y+10z=-3$

Si una recta y un plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo.

$$3x+3z=5 \Rightarrow x+z=\frac{5}{3} \Rightarrow x=\frac{5}{3}-z \Rightarrow \frac{5}{3}-z-y+2z=2 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}+z \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=\frac{5}{3}-\lambda \\ y=-\frac{1}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_\beta}=(1,-\alpha,10) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\beta} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\beta}=0 \Rightarrow (-1,1,1)(1,-\alpha,10)=0 \Rightarrow -1-\alpha+10=0 \Rightarrow \alpha=9$$